V-12 (1 h 3 min) 18-Marzo-2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Discretización Trasformada de Fourier (DFT)**

(VII) de resumen de V-10: Función periódica $\boldsymbol{\phi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n(t)\ e^{iK_n x}} \in \mathbb{R}$ $\left(K_n = \frac{2\pi}{L} n \ \rightarrow K_{-n} = -K_n\right)$

(VIII) de resumen de V-10: En general $C_n(t) = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \phi(x,t)\, e^{-i\, K_n\, x}\, dx$ cumplen: $C_{-n}(t) = C_n^*(t)$

(II) de resumen de V-11: Si ϕ cumple ecuación de onda $C_n(t) = A_n\, e^{-i\omega_n t} + A_{-n}^*\, e^{i\omega_n t}$ $\omega_n = v\left|\frac{2\pi}{L} n\right| = \omega_{-n}$

Las A_n y A_{-n} son número complejos constantes arbitrarios, obtenidos al resolver una ecuación diferencial.

Determinación de las constantes arbitrarias A_n y A_{-n} a partir de condiciones iniciales cuando $t=0$.

Sustituyendo $t = 0$ se debe cumplir: $C_n(0) = A_n + A_{-n}^*$

También: $\phi(x,0) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n(0)\ e^{iK_n x} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (A_n + A_{-n}^*) e^{iK_n x} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_n\, e^{iK_n x} + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_{-n}^*\, e^{iK_n x}$

Como los sumatorios van desde n = -∞ a n = +∞ se obtienen los mismos sumandos cambiando "n" por "-n". Hacemos esto en el segundo sumatorio: $\phi(x,0) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_n\, e^{iK_n x} + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_n^*\, e^{-iK_n x}$

Por otro lado, como $\phi(x,0) \in \mathbb{R}$ y con objeto de expresarlo como suma de términos con $e^{iK_n x}$ y con $e^{-iK_n x}$, utilizamos la propiedad de que la parte real de un complejo es: $\phi_{Real} = \frac{1}{2}(\phi + \phi^*)$

Ponemos: $\phi(x,0) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n(0)\ e^{iK_n x} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{2} C_n(0)\ e^{iK_n x} + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{2} C_n^*(0)\ e^{-iK_n x}$

Ahora estamos en disposición de comparar las dos expresiones anteriores con las exponenciales en azul:

$A_n = \frac{1}{2} C_n(0)$ y $A_n^* = \frac{1}{2} C_n^*(0)$ Además, como $C_n^*(0) = C_{-n}(0)$ $\Longrightarrow$ $A_n^* = \frac{1}{2} C_{-n}(0) = A_{-n}$

Llegamos a la conclusión que las A_n cumplen lo mismo que las C_n: $\boldsymbol{A_{-n} = A_n^*}$ y $\boldsymbol{A_n = \frac{1}{2} C_n(0)}$ **(I)**

Podría simplificarse (II) de resumen de V-11: $C_n(t) = A_n\left(e^{-i\omega_n t} + e^{i\omega_n t}\right)$

EJEMPLO Suponemos campo ϕ, que en $t = 0$ es $\phi(x,0) = \begin{cases} 1\ \forall\ x \in [-1,+1] \\ 0\ \forall\ x \notin [-1,+1] \end{cases}$

Queremos hallar su evolución en el tiempo $\phi(x,t)$

1) Hallamos $C_n(0)$ mediante (VIII) de resumen de V-10: $C_n(0) = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \phi(x,0)\, e^{-i\, K_n\, x}\, dx$ que en este caso será:

$C_n(0) = \frac{1}{L}\int_{-1}^{+1} 1 \cdot e^{-i\, K_n\, x}\, dx = -\frac{1}{i\, K_n L}\left[e^{-i\, K_n\, x}\right]_{-1}^{+1} = -\frac{1}{i\, K_n L}\left(e^{-i\, K_n} - e^{+i\, K_n}\right) = \frac{2 \sin K_n}{K_n L}$ (real)

El caso particular cuando $n = 0$ ($K_n = 0$) se calcula aparte: $C_0(0) = \frac{1}{L}\int_{-1}^{+1} dx = \frac{2}{L}$

2) Hallamos $A_n = \frac{1}{2} C_n(0) = \frac{\sin K_n}{K_n L}$ y el caso particular (cuando $K_n = 0$) $A_0 = \frac{1}{2} C_0(0) = \frac{1}{L}$

3) Hallamos $C_n(t) = A_n\left(e^{-i\omega_n t} + e^{i\omega_n t}\right) = \frac{\sin K_n}{K_n L} 2\cos\omega_n t$ y caso particular ($K_n = 0$): $C_0(t) = \frac{1}{L} 2\cos\omega_0 t = \frac{2}{L}$

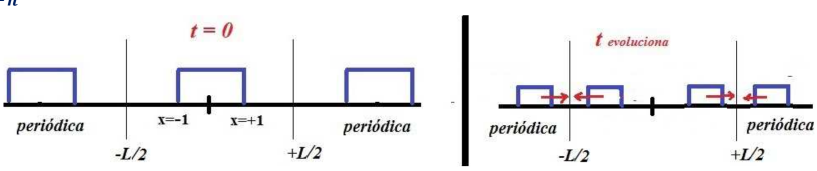
4) Ponemos: $\phi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n(t)\ e^{iK_n x}$

$$\phi(x,t) = \frac{2}{L} + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{2 \sin K_n}{K_n L} \cos\omega_n t\, e^{iK_n x} = \frac{2}{L} + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{2 \sin K_n}{K_n L}(\cos K_n x + i \sin K_n x)\cos\omega_n t$$

$$\phi(x,t) = \frac{2}{L} + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{2 \sin K_n}{K_n L} \cos K_n x \cdot \cos\omega_n t + i \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{2 \sin K_n}{K_n L} \sin K_n x \cdot \cos\omega_n t$$

Los sumandos del primer sumatorio son todos positivos, tanto para K_n positivos como negativos. En cambio los sumandos del segundo sumatorio se anulan entre sí, pues son positivos con $K_n > 0$ y negativos con $K_n < 0$. Por lo tanto queda la parte real: $\boldsymbol{\phi(x,t) = \frac{2}{L} + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{2 \sin K_n}{L K_n} \cos K_n x \cdot \cos\omega_n t}$

En el video se programa con MatLab para L = 20, v = 1, se toman 400 sumandos y se ve evolucionar al variar t



Al desarrollar una función ϕ(x,t) periódica en serie de Fourier obtenemos un sumatorio de infinitos términos y cada uno de ellos es una función continua a lo largo del eje X: $\boldsymbol{\phi(x,t)} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \boldsymbol{C_n(t)}\ \boldsymbol{e^{iK_n\,x}}$

$$\boldsymbol{\phi(x,t)} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_n \left(e^{-i\omega_n t} + e^{i\omega_n t}\right) \boldsymbol{e^{iK_n\,x}} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_n e^{-i(\omega_n t - K_n x)} + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_n e^{i(\omega_n t + K_n x)}$$

Como los sumatorios van desde -∞ a +∞ se obtienen los mismos sumandos cambiando *n* por –*n*. Hacemos esto en el segundo sumatorio, teniendo en cuenta que $\boldsymbol{A_{-n} = A_n^*}$, $\boldsymbol{\omega_{-n} = \omega_n}$ y $\boldsymbol{K_{-n} = -K_n}$

$$\boldsymbol{\phi(x,t)} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \boldsymbol{C_n(t)}\ \boldsymbol{e^{iK_n\,x}} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\left[\boldsymbol{A_n e^{-i(\omega_n t - K_n x)}} + \boldsymbol{A_n^* e^{i(\omega_n t - K_n x)}}\right] \qquad \textbf{(II)}$$

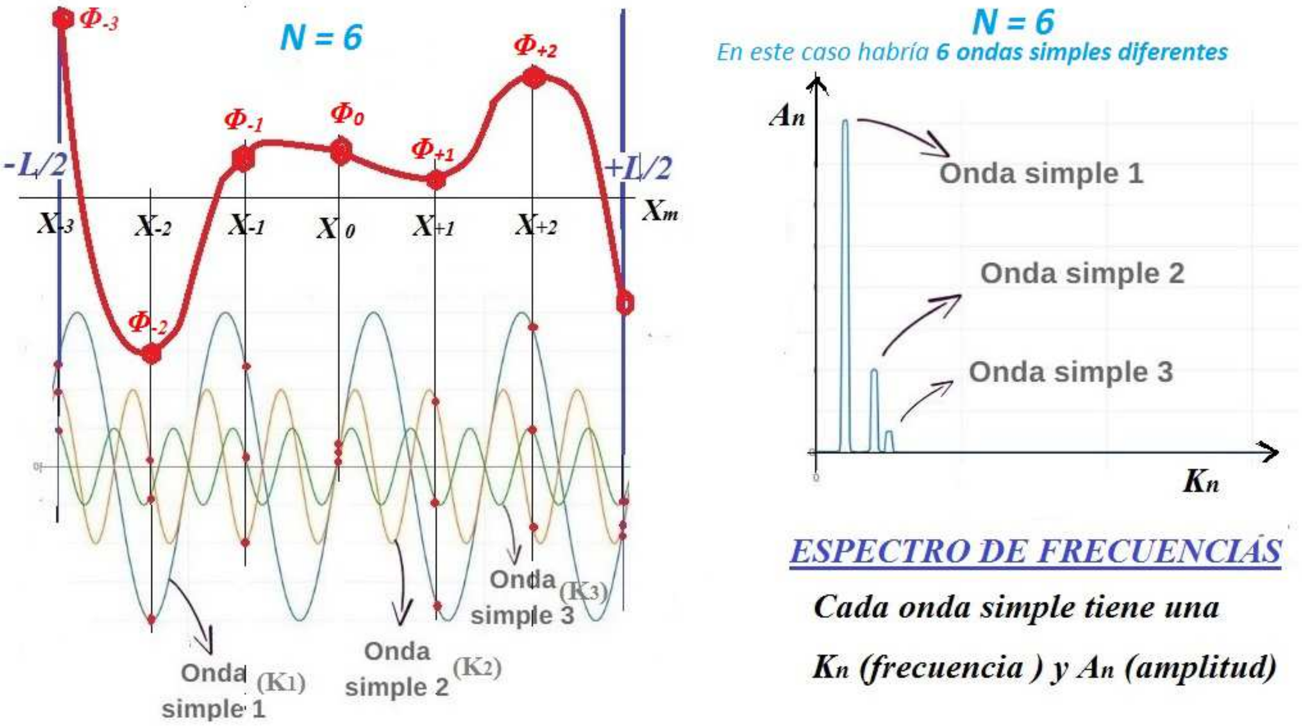
En **(II)** se obtiene ***ϕ(x,t)*** continua como suma de infinitas ondas continuas simples: $\left[\boldsymbol{A_n e^{-i(\omega_n t - K_n x)}} + \boldsymbol{A_n^* e^{i(\omega_n t - K_n x)}}\right]$

Discretización de la Serie de Fourier (DFT) Obtenemos ***N*** puntos discretos de la función $\phi(x_m,t)$ correspondientes a ***N*** valores del eje X: $\boldsymbol{x_m}$ comprendidos en [-L/2, +L/2]

Cada uno de esos puntos $\boldsymbol{\phi_m(t)}$. se obtiene aproximadamente (exacto si fuera $N = \infty$) como suma de ***N*** valores de las funciones simples evaluadas en $\boldsymbol{x_m}$ (el sumatorio se extendido entre -*N/2* y *N/2-1,* abarcando así N valores)

$$\boldsymbol{\phi_m(t)} \approx \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{n=\frac{N}{2}-1} \boldsymbol{C_n(t)\ e^{iK_n\,x_m}} = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{n=\frac{N}{2}-1} \left[\boldsymbol{A_n e^{-i(\omega_n t - K_n x_m)}} + \boldsymbol{A_n^* e^{i(\omega_n t - K_n x_m)}}\right] \qquad \textbf{(III)}$$

La izquierda de la figura es una representación de la función $\phi(x_m,t)$ para un instante *"t congelado"*
La parte derecha representa (para cualquier *t)* el espectro de ondas simples con el que se construye la función



Observando la expresión **(III)** vemos que a cada sumando **(onda simple), de índice "n",** le corresponde:

- Un coeficiente $\mathbf{C_n(t)}$ en el que está incluida la amplitud $\mathbf{A_n}$ de la onda simple
- Un valor $\mathbf{K_n}$ relacionado con la frecuencia de la onda simple: $\mathbf{K_n} = 2\pi\, \mathbf{f_n}/v$ (v es velocidad de propagación)

Cada coeficiente $\mathbf{C_n(t)}$ se obtiene, (VIII) de resumen de V-10, con integral continua entre –L/2 y L/2 que ahora discretizamos como sumatorio desde que $\boldsymbol{x_m}$ = *-L/2= m·L/N* → ***m* = *–N/2*** hasta $\boldsymbol{x_m}$ = *+L/2= m·L/N* → ***m* = *+N/2***

$$C_n(t) = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \phi(x,t)\, e^{-i\,K_n\,x}\,dx \approx \frac{1}{L}\sum_{m=-N/2}^{+\frac{N}{2}-1} \phi_m(t)\ e^{-i\,K_n\,x\,m}\,\frac{L}{N} \rightarrow \boldsymbol{C_n(t)} \approx \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{m=-N/2}^{m=\frac{N}{2}-1} \boldsymbol{\phi_m(t)\ e^{-i\,K_n\,x_m}} \qquad \textbf{(IV)}$$

Se comprueba que solo hay <u>***N*** coeficientes $\mathbf{C_n(t)}$ diferentes</u> → <u>***N*** valores del índice "n"</u>, que tomaremos **[-N/2,…N/2-1]**

En efecto: $K_n x_m = \frac{2\pi}{L} n \frac{L}{N} m = \frac{2\pi m}{N} n \implies C_{n+N} = \cdots\ \boldsymbol{e^{-i\frac{2\pi m}{N}(n+N)}} = \cdots\ \boldsymbol{e^{-i\frac{2\pi m}{N}n}\, e^{-i2\pi m}} = \cdots\ \boldsymbol{e^{-i\frac{2\pi m}{N}n}} \cdot \mathbf{1} = C_n$

Puesto que sólo hay N coeficientes $C_n(t)$ diferentes, <u>sólo se suman N ondas simples diferentes</u>, cada una con su K_n, para obtener los $\boldsymbol{\phi_m(t)}$. <u>Por eso en **(III)** el índice ***n*** del sumatorio va desde ***n* = –N/2** …. ***n* = +N/2–1**</u>

Espectro de frecuencias: ***n*** **= –N/2** → $\boldsymbol{K_n} = -\frac{2\pi}{L}\frac{N}{2} = -\frac{\pi}{L/N} = -\boldsymbol{\frac{\pi}{d}}$ …… ***n*** **= N/2-1** → $\boldsymbol{K_n} = \frac{2\pi}{L}\left(\frac{N}{2} - 1\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{d}} - \boldsymbol{\frac{2\pi}{L}}$

Continuación resumen V-12 — EJEMPLO sencillo

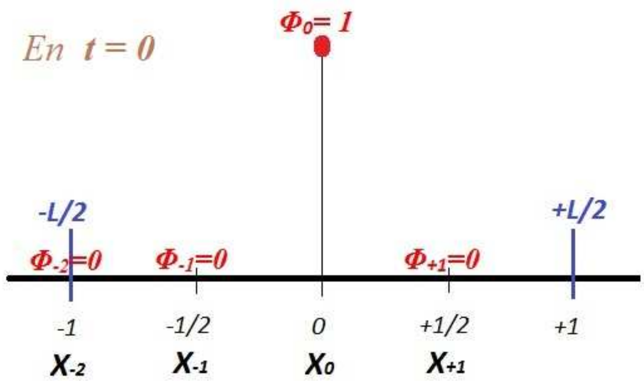
Sea la función, que **en** $t = 0$, es:: $\phi(x) = \begin{cases} \mathbf{1} & \boldsymbol{si\ x = 0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\forall\ x \neq 0} \end{cases}$

Periódica en el eje X de periodo $L = 2$

Discretizamos en $N = 4$ puntos x_m del eje X :

$$x_m = \left\{ x_{-2} = -1\,;\ \ x_{-1} = -\tfrac{1}{2}\,;\ \ x_0 = 0\,;\ \ x_1 = +\tfrac{1}{2} \right\}$$

Se pretende conocer, habiendo elegido N = 4, el espectro de frecuencias (valores de K_n) de las 4 ondas simples, así como los coeficientes C_n, de los que se deducen su amplitudes (valores de A_n)



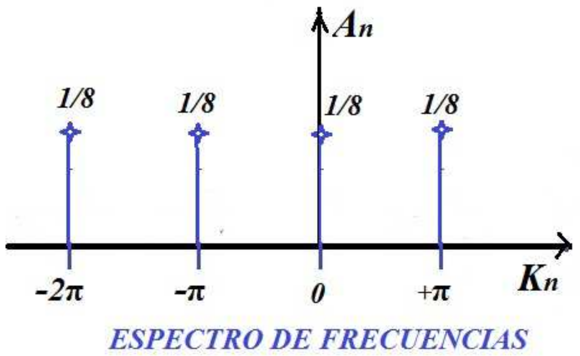
$K_n = \frac{2\pi}{L} n$ $\quad L = 2$ y los valores de "n" hemos visto que va desde $-N/2$ a $N/2-1$. Por lo tanto **n = -2, -1, 0, +1**

Los coeficientes: $C_n(t) \approx \frac{1}{N}\sum_{m=-N/2}^{m=\frac{N}{2}-1} \phi_m(t)\ e^{-i\,K_n\,x_m}$

Los valores de ϕ_m que conocemos son para $t = 0$: $\quad C_n(0) \approx \frac{1}{4}\left(0 + 0 + 1 \cdot\ e^{-i\,K_n 0} + 0\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ $\quad$ (todos iguales en $t = 0$)

Las amplitudes, según **(I)**: $\quad A_n = \frac{1}{2} C_n(0)$ **todas valen igual** $\quad \boldsymbol{A_n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$

n = -2	$K_{-2} = \frac{2\pi}{2}(-2) = -2\pi$	$C_{-2}(0) = \frac{1}{4}$	$A_{-2} = \frac{1}{8}$
n = -1	$K_{-1} = \frac{2\pi}{2}(-1) = -\pi$	$C_{-1}(0) = \frac{1}{4}$	$A_{-1} = \frac{1}{8}$
n = 0	$K_0 = \frac{2\pi}{2}(0) = 0$	$C_0(0) = \frac{1}{4}$	$A_0 = \frac{1}{8}$
n = +1	$K_{+1} = \frac{2\pi}{2}(+1) = +\pi$	$C_{+1}(0) = \frac{1}{4}$	$A_{+1} = \frac{1}{8}$



La función dada inicialmente corresponde al instante $t = 0$: $\boldsymbol{\phi(x, 0)} = \begin{cases} \mathbf{1} & \boldsymbol{si\ x = 0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\forall\ x \neq 0} \end{cases}$

Si suponemos que la velocidad de propagación de todas las ondas simples es igual **v = 1 m/s,** obtenemos los valores de $\omega_n = v|\boldsymbol{K_n}| = |\boldsymbol{K_n}| = \omega_{-n}$, sabemos que $A_n = A_n^* = \frac{1}{8}$ y podemos expresar la evolución de la función con el tiempo, utilizando **(III),** para cada uno de los cuatro valores de ϕ_m: ϕ_{-2}, ϕ_{-1}, ϕ_0 y ϕ_{+1}

$$\boldsymbol{\phi_m(t) \approx \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{n=\frac{N}{2}-1} \left[A_n e^{-i(\omega_n t - K_n x_m)} + A_n^* e^{i(\omega_n t - K_n x_m)}\right] = \frac{1}{4}\sum_{n=-2}^{n=+1} \left[\cos\ (\omega_n t - K_n x_m)\right]}$$

		$\omega_{-2} = 2\pi; K_{-2} = -2\pi$	$\omega_{-1} = \pi;\ K_{-1} = -\pi$	$\omega_0 = 0\ ; K_0 = 0$	$\omega_{+1} = \pi\ ;\ K_{+1} = \pi$	
$x_{-2} = -1$	$\phi_{-2} = \frac{1}{4}[$	$\cos(2\pi t - 2\pi)$	$+\cos(\pi t - \pi)$	$+\cos(0t - 0)$	$+\cos(\pi t + \pi)] =$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}[\boldsymbol{\cos(2\pi t) - 2\cos(\pi t) + 1}]$
$x_{-1} = -\frac{1}{2}$	$\phi_{-1} = \frac{1}{4}[$	$\cos(2\pi t - \pi)$	$+\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$	$+\cos(0t - 0)$	$+\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)] =$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}[\boldsymbol{-\cos(2\pi t) + 1}]$
$x_0 = 0$	$\phi_0 = \frac{1}{4}[$	$\cos(2\pi t - 0)$	$+\cos(\pi t - 0)$	$+\cos(0t - 0)$	$+\cos(\pi t - 0)] =$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}[\boldsymbol{\cos(2\pi t) + 2\cos(\pi t) + 1}]$
$x_{+1} = +\frac{1}{2}$	$\phi_{+1} = \frac{1}{4}[$	$\cos(2\pi t + \pi)$	$+\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$	$+\cos(0t - 0)$	$+\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)] =$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}[\boldsymbol{-\cos(2\pi t) + 1}]$

Obsérvese que para $t = 0$ los cuatro valores anteriores cumplen las condiciones de la función inicial $\phi(x, 0)$

En el video se programa en MatLab y se ve la evolución temporal de los cuatro puntos.